文章编号:1004-4736(2001)03-0076-03

"牛顿迭代法"构造高阶M-J分形图

杨　帆，郭德文
(武汉化工学院 自动化系，湖北武汉 430073)

摘　要:阐述了用"牛顿迭代法"构造高阶M-J分形图的原理、方法及分形图特征;并用VB编制了分形演示程序软件包;用计算机模拟了大量分形图.

关键词:牛顿迭代法;分形图;软件包;计算机模拟
中图分类号:TP 391.4　　**文献标识码**:A

0 引　言

二十世纪初,法国杰出的数学家朱俐亚(G. Julia),在复动力系统这一研究领域发明了以他的名字命名的Julia集(以下简称J集),经过短暂的研究热潮后走向低谷.重新唤醒沉睡半个世纪的Julia集的契机有二:一是巴黎大学数学家曼德布罗特教授(B. Mandelbrot)发现了以他的名字命名的Mandelbrot集(以下简称M集);二是计算机图形学.目前,M集J集已成为分形与混沌的一种国际标志,赞赏者说它们是最复杂的数学对象,即使用无限的时间也不足以观察它的全貌,那饰以多姿荆棘的圆盘,那弯曲缠绕的螺旋线和细丝,那挂着微细颗粒的鳞茎,那无穷尽的斑驳色彩[1,2]……许多人都对它进行研究,学者们除了对复映射 $f_1(Z)\leftarrow Z^2+C$ 的复动力迭代重新产生浓厚的研究兴趣之外,又对复映射 $f_2(Z)\leftarrow Z^n+C$、$Z^{-n}+C$、$Z^\alpha+C(\alpha\in R^1)$ 构造混沌分形图进行深入的研究[3,4].陈宁等又提出用复映射 $f_3(Z)\leftarrow Z^W+C(W=\alpha+i\beta)$ 在参数平面及动力平面上构成复动力系统进行系统研究[5].本文概括、综合并发展了曼德布罗特、朱俐亚及陈宁等人的工作,将牛顿迭代法绘制复映射 $f_2(Z)\leftarrow Z^n+C$ 的分形图推广到复数平面,即构造了复映射 $f_3(Z)\leftarrow Z^W+C(W=\alpha+i\beta)$ 在参数平面及动力平面上的分形图,使其更具代表性,这是一个全新的研究领域.

1 "牛顿迭代法"构造高阶M-J分形混沌图的原理及迭代公式

牛顿法的本质是"以直代曲",如求方程 $f(x)=0$ 的根 c,先取初值 x_1,用它近似方程的根 c,则过 $(x_1,f(x_1))$ 点的切线方程为:

$$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$$

近似代替曲线 $f(x)$,然后用切线方程

$$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)=0$$

的根 $x=x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$ 近似代替曲线方程的根 c,而得到 c 的第二个近似值.依此类推可得到迭代公式:

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n) \tag{1}$$

将其推广到复平面上去.

令 $f(Z)=Z^W+C=0$.则有迭代关系式:

$$Z_{n+1}=Z_n-f(z)/f'(Z) \tag{2}$$

设 $Z=x+iy=re^{i\theta}$　则 $r=(x^2+y^2)^{1/2}$

$\theta=\mathrm{ATAN}\ y/x$　　$(x>0)$

或 $\theta=\pi+\mathrm{ATAN}\ y/x$　　$(x<0)$

$W=\alpha+i\beta=r_1e^{i\theta}$　则 $r_1=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$

$\theta_1=\mathrm{ATAN}\ \beta/\alpha$　　$(\alpha>0)$

或 $\theta_1=\pi+\mathrm{ATAN}\ \beta/\alpha$　　$(\alpha<0)$

$C=a+ib=r_2e^{i\theta}$　则 $r_2=(a^2+b^2)^{1/2}$

$\theta_2=\mathrm{ATAN}\ b/a$　　$(a>0)$

或 $\theta_2=\pi+\mathrm{ATAN}\ b/a$　　$(a<0)$

利用复数运算关系得迭代关系式:

$$\begin{cases} X=x-\dfrac{r}{r_1}\cos(\theta-\theta_1)-\dfrac{r_2}{r_1}e^{[\beta\theta+(1-\alpha)\ln r]}\times \\ \qquad \cos[\theta_2-\theta_1+(1-\alpha)\theta-\beta\ln r] \\ Y=y-\dfrac{r}{r_1}\sin(\theta-\theta_1)-\dfrac{r_2}{r_1}e^{[\beta\theta+(1-\alpha)\ln r]}\times \\ \qquad \sin[\theta_2-\theta_1+(1-\alpha)\theta-\beta\ln r] \end{cases} \tag{3}$$

2 复映射 $f_3(Z)\leftarrow Z^W+C$ $(W=\alpha+i\beta)$ 的图象特征

2.1 $\beta=0$ 的M-J图象特征

当 $\beta=0$ 时,$W=\alpha$,$f_3(Z)=Z^\alpha+C$.

收稿日期:2001-04-09
作者简介:杨　帆(1966-),女,湖北公安人,讲师.

a. $\alpha>1$，且为正整数时的图象特征是可知的. 若变换的方次为 n，相应的 J 集和 M 集有 n 个和 $n-1$ 个旋转对称的链，汇合在有 n 个和 $n-1$ 个大花瓣的交点上（$c=-1$）. 链上有无数的"花朵"串接在一起. 图 1、2、3、4 是 α 分别为 3、4 时的 Julia 和 Mandel 图.

图 1　$\alpha=3$ 时 Jaliu

图 2　$\alpha=4$ 时 Jaliu

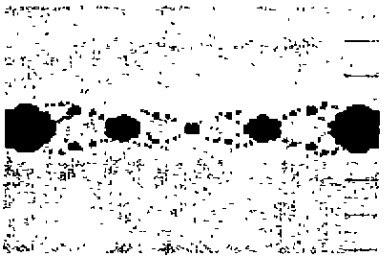

图 3　$\alpha=3$ 时 Mandel

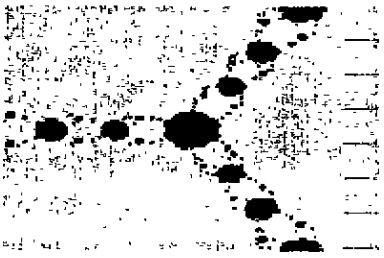

图 4　$\alpha=4$ 时 Mandel

b. $\alpha<0$ 且为负整数时，图象有如下特征，相应的 J 集有 $|W|$ 个旋转对称的主花瓣，相应的 M 集有 $|W|+1$ 个旋转对称的主花瓣，分别汇合在有 $|W|$ 和 $|W|+1$ 个大花瓣的交点上，每个主花瓣上有无数个花朵与之相连，每一个花朵由（$|W|-1$）和（$|W|-2$）个花瓣构成. 这一过程对于每一个花朵来说是无穷嵌套的. 用牛顿迭代公式(3)，运用 VB 编程，选取初始迭代点 $c=-1$，$\alpha=-3$、-4 时的 M－J 分形图如图 5、图6、图 7、图 8.

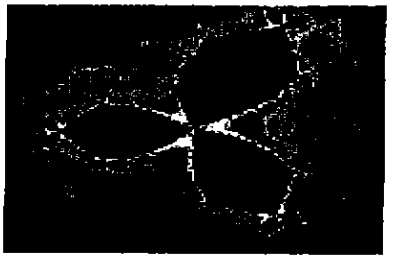

图 5　$\alpha=-3$ 时 Julia 集

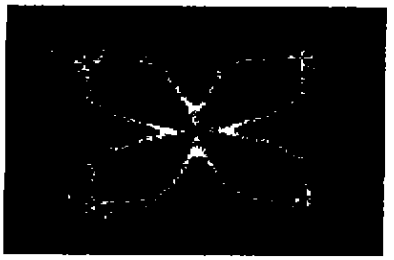

图 6　$\alpha=-4$ 时 Julia 集

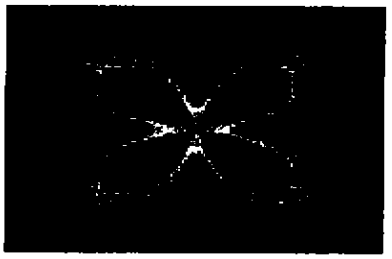

图 7　$\alpha=-3$ 时 Mande 集

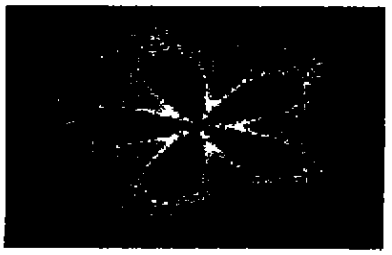

图 8　$\alpha=-4$ 时 Mande 集

2.2　$\beta\neq0$ 的 M－J 图象特征

当 $\beta\neq0$ 时，$f(z)=Z^W+C(W=\alpha+i\beta,C=C_x+iC_y)$.

(1) $\alpha<0$ 时，且 $n<|\alpha|<n+1$ 时，J 集由 n 个完整的旋转链和一个不完整的链组成，M 集分形图象由 $n-1$ 个完整的旋转链和一个不完整的链组成，不完整的链随 α 的增加逐渐完整. 这些链汇集在一个交点上，链上有无数个"花朵"串接在一起. 在每个花朵的结点处生长出 n 个（J 集）和 $n-1$（M 集）个花朵，其中一个花朵沿原有花朵的生长方向继续向无穷远的方向生长，此生长方式构成了链；另外的花朵沿原有花朵的花瓣的边界向相反的方向生长，这里又是一连串的花朵连接在一起. 图 9、10、11、12 分别为 J 集 M 集分形图，绘图区域为：$C_x,C_y\in[-2,+2]$，J 集图象 M 集分形图的取值为 $[\alpha,\beta]$：$[-5.4,-0.2]$，$[-3.4,-0.2]$，$[C_x,C_y]$：$[0.74543,0.11301]$，$[0.74543,1.22301]$.

图 9 $\alpha=-5.4,\beta=-0.2$ Julia 集

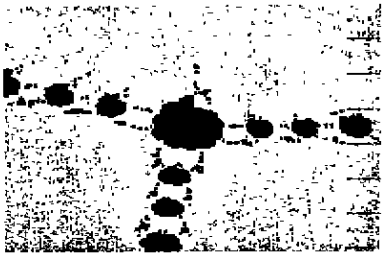

图 10 $\alpha=-3.4,\beta=-0.2$ Julia 集

图 11 $\alpha=-5.4,\beta=-0.2$ Mande 集

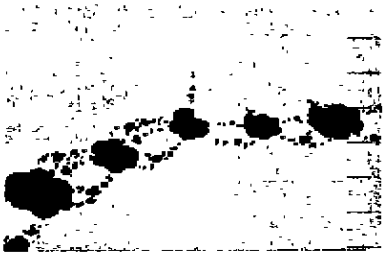

图 12 $\alpha=-3.4,\beta=-0.2$ Mande 集

(2) $\alpha>0$，且 $n<\alpha<n+1$ 时，J 集由 n 个完整花瓣和一个不完整花瓣组成，M 集分形图象由 $n+1$ 个完整花瓣和一个不完整花瓣组成，不完整花瓣随 α 的增加逐渐完整。每个主花瓣上有无数花朵与之相连，每一个花朵由 W 和 $W-1$ 个花瓣构成。此过程对于每朵花是无穷嵌套的。图 13、14、15、16 绘图区域为：$C_x,C_y\in[-2,+2]$，J 集 M 集分形图的取值为 $[\alpha,\beta]$：[2.4，0.2]，[3.8，0.2]，$[C_x,C_y]$：[0.74543，0.11301]，[0.74543，1.22301]。

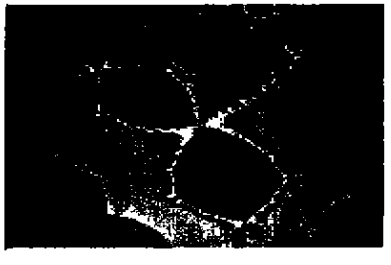

图 13 $\alpha=2.4,\beta=0.2$ 时 Julia 集

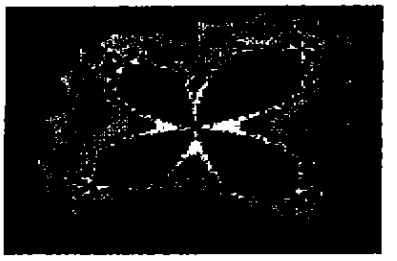

图 14 $\alpha=+3.8,\beta=0.2$ 时 Julia 集

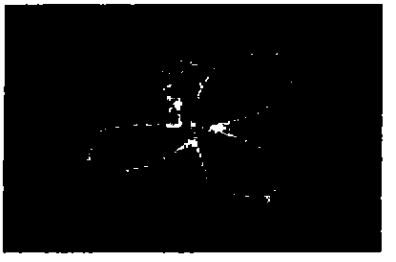

图 15 $\alpha=2.4,\beta=0.2$ 时 Mande 集

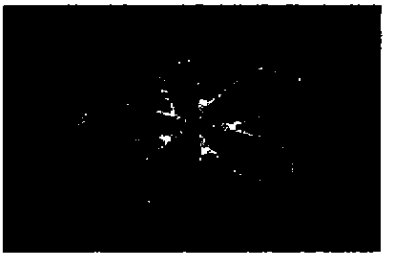

图 16 $\alpha=+3.8,\beta=+0.2$ Mande 集

3 结 语

用牛顿迭代法构造出完整的高阶 M－J 分形图，特别是复映射 $f_3(Z)\leftarrow Z^W+C(W=\alpha+i\beta)W$ 为负整数、分数、和复数时的分形图更是一个全新的研究领域。M 集和 J 集具有相似的特征，但完整花瓣或旋转的链的个数不同。描绘 Julia 集动力平面上的轨迹和 Mandelbrot 集参数平面上的轨迹，直观的表现出牛顿迭代的某些动力学特征，反映了 f 映射在 Julia 集附近和 Mandelbrot 集附近具有对初始条件的敏感依赖性的混沌特征。

参考文献：

[1] Lasota A, Mackey MC. Chaos and Fractals Noise [M]. Second edition Springer－Verlag. 1994 30～150.

[2] Chilvers I, Osborne H. The Oxford Dictionary of Art[M]. Oxford Univers ity Press, 1988 . 20～200.

[3] 胡瑞安. 分形的计算机图象及应用[J]. 科技导报. 1992,3.

[4] 陈宁，朱伟勇. 构造高阶 M－J 分形图及对称逃逸时间算法[J]. 东北大学学报，1996，17(3)：225～229.

[5] 陈宁，朱伟勇. 复映射 $Z\leftarrow Z^w+C$ $(W=\alpha+i\beta)$ 构造 M 集[J]. 计算机研究与发展，1997，34(12)：899～907.

（下转第 85 页）

3 应　用

这种方式仅需在电路上增加下载接口，这个接口是直接连接到 FPGA 或 CPLD 的下载功能引脚上. 电路制成后，电缆与计算机并行口相连即可使用.

下载线的应用改进了传统的 FPGA 和 CPLD 开发系统的设计方式，使应用电路和开发系统合二为一. 使硬件仿真调试过程更加方便，简化了设计过程，缩短了开发周期.

在自制的逻辑分析仪中已成功通过 ByteBlasterMV 下载线直接下载了配置和编程数据. 因此，在短期内成功的完成了设计，大大提高了工作效率.

参考文献：

[1] 宋万杰，罗　丰，吴顺君. CPLD 技术及应用[M]. 西安：电子科技大学出版社，1999.

[2] 朱明程. GAL 原理及应用设计（现场可编程逻辑门阵列器件）[M]. 北京：电子工业出版社，1998.

The application of BytBlaster MV LTP download cable

LI Bing - sheng , XU Yang - yang , WANG Lan , YANG Jun

(College of Information Science and Engineering , Wuhan University of Science and Technology , Wuhan 430081 , China)

Abstract: A method used to self - design the download circuit according to the principle of ByteBlaster MV was presented, and usesing the LPT cable, the LPT port of the PC was connected to the circuit board. The whole design is aimed to simplify the CPLD's developing process and shorten the designing period.

Key words: LPT; download cable; circuit; chipset; MAX+PLUSII

本文编辑：陈小平

（上接第 78 页）

The high M - J fractal mapping are constructed in Newton method

YANG Fan ,GUO De - wen

(Department of Automation ,Wuhan Institute of Chemical Technology ,Wuhan 430073, Chnia)

Abstract: The principle ,method and fractal character of high M - J fractal mapping were described drawn by Newton overlapping method , software packet were made with VB, and a lot of fractals were simulated with computer .

Key words: Newton overlapping method ; the fractal mapping; software packet computer simulate

本文编辑：陈小平